目　次

写在前面

这本小册子的内封上所載的图形，称为“楊輝三角”．楊輝三角并不是楊輝发明的，原来的名字也不是“三角”，而是“开方作法本源”；后来也有人称为“乘方求廉图”．这些名称实在太古奥了些，所以我們簡称之为“三角”．

楊輝是我国宋朝时候的数学家，他在公元1261年著了一本叫做《詳解九章算法》的書，里面画了这样一张图，并且說这个方法是出于《释鎖算書》，賈宪曾經用过它．但《释鎖算書》早已失传，这書刊行的年代无从查考，是不是賈宪所著也不可知，更不知道在賈宪以前是否已經有这个方法．然而有一点是可以肯定的，这一图形的发現在我国当不迟于1200年左右．在欧洲，这图形称为“巴斯加(Pascal)三角”．因为一般都認为这是巴斯加在1654年发明的．其实在巴斯加之前已有許多人論及过，最早的是德国人阿批納斯(Pertrus Apianus)，他曾經把这个图形刻在1527年著的一本算术書的封面上．可是无論怎样，楊輝三角的发現，在我国比在欧洲至少要早300年光景．

这本小册子是为中国数学会創办数学竞賽而作的，其中一部分曾經在中国数学会北京分会和天津分会举办的数学通俗講演会上講过．它的目的是給中学同学們介紹一些数学知識，可以充当中学生的課外讀物．因此，我們既不鑽进考証的

领域，为这一图形的历史多費笔墨，也不只是限于古代的有关楊輝三角的知識，而是从我国古代的这一优秀創造談起，講一些和这图形有关的数学知識。由于讀者对象主要是中学生，我們不得不把論述的范围給与适度的限制。

我必須在此感謝潘一民同志，本書的絕大部分是他根据我的非常簡略的提綱写出的。

华罗庚

1956年6月序于清华园

一　楊輝三角的基本性質

我們先来考察一下**楊輝三角**里面数字排列的規則．一般的楊輝三角是如下的图形：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1\\
\end{array}
$$

……………………………………

第　n　行　　$1, C_{n-1}^1, \cdots, C_{n-1}^{r-1}, C_{n-1}^r, \cdots, C_{n-1}^{n-2}, 1$

第 $n+1$ 行　　$1,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \cdots\cdots,\ C_n^r,\ \cdots\cdots\cdots,\ C_n^{n-1},\ 1$

……………………………………………………

这里，記号 C_n^r 是用来表示下面的数：

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!},$$

而記号 $n!$（同样 $r!$ 和 $(n-r)!$），我們知道它是代表从 1 到 n 的連乘积 $n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$，称为 n 的**阶乘**．学过排列組合的讀者还可以知道，C_n^r 也就是表示从 n 件东西中取出 r 件东西的組合数．

从上面的图形中我們能看出什么呢？就已經写出的一些数目字来看，很容易发現这个三角形的两条斜边都是由数字1組成的，而其余的数都等于它肩上的两个数相加。例如$2=1+1, 3=1+2, 4=1+3, 6=3+3, \cdots$。其实楊輝三角正就是按照这个規則作成的。在一般的情形，因为

$$C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{r!\,(n-r)!}[r+(n-r)]=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$=C_{n}^{r},$$

这說明了，上图中的任一数C_n^r等于它肩上的两数C_{n-1}^{r-1}和C_{n-1}^{r}的和。

为了方便起見，我們把本来沒有意义的記号C_n^0和C_{n-1}^{n}令它們分别等于1和0，这样就可以把刚才得到的結果写成关系式：

$$\boxed{C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r}=C_{n}^{r},\ (r=1,2,\cdots,n),}$$

而称它为**楊輝恒等式**。这是楊輝三角最基本的性質。

对于楊輝三角的构成，还可以有一种有趣的看法。

如图1，在一块傾斜的木板上釘上一些正六角形的小木块，在它們中間留下一些通道，从上部的漏斗直通到下部的长方框子。把小弹子倒在漏斗里，它首先会通过中間的一个通道落到第二层六角板上面，以后，落到第二层中間一个六角板的左边或右边的两个竪直通道里去。再以后，它又会落到下

一层的三个竖直通道之一里面去．这时，如果要弹子落在最左边的通道里，那末它一定要是从上一层的左边通道里落下来的才行（1个可能情形）；同样，如果要它落在最右边的通道里，它也非要从上一层的右边通道里落下来不可（1个可能情形）；至于要它落在中間的通道里，那就无論它是从上一层的左边或右边落下来的都成（2个可能情形）．

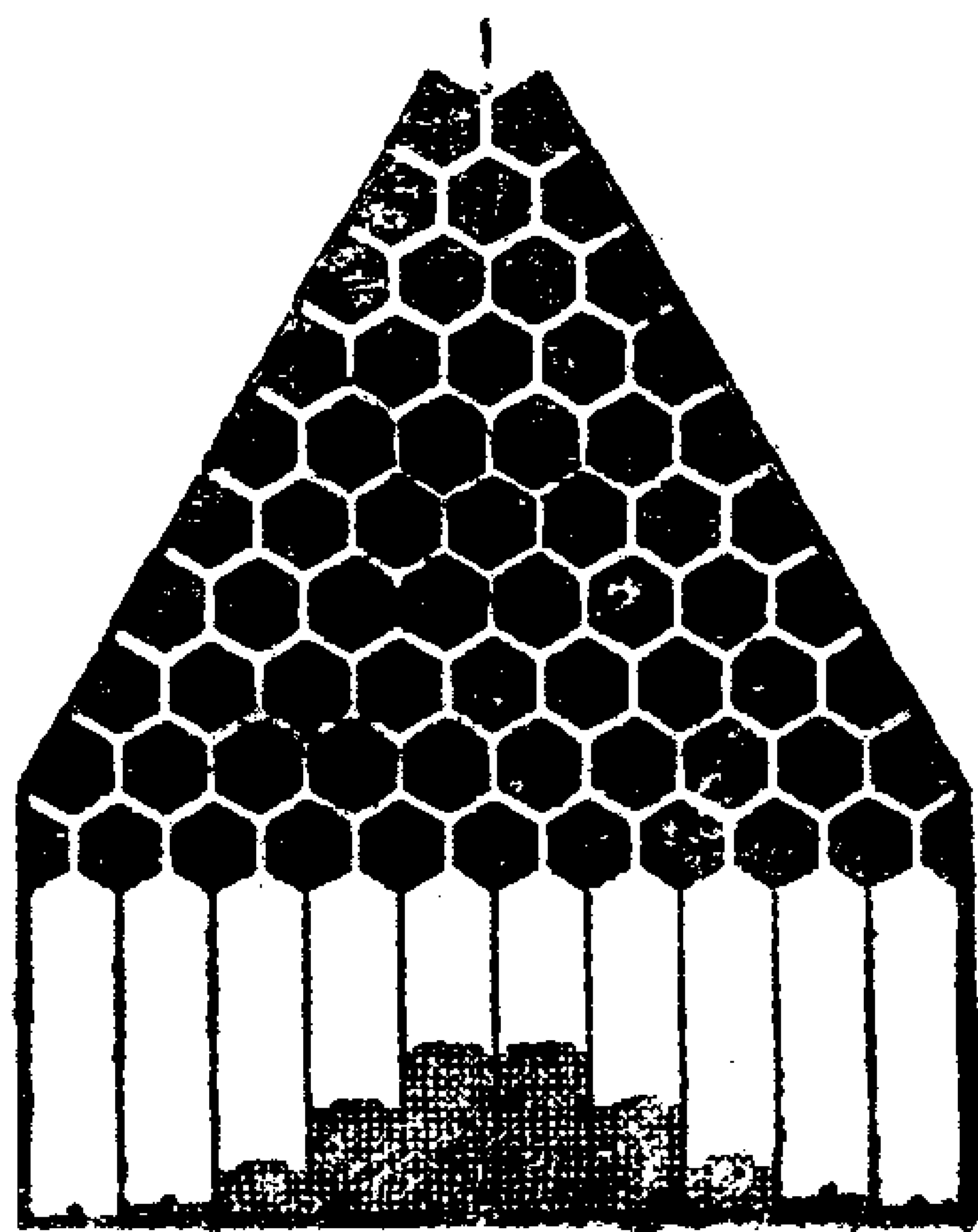


图 1.

这样一来，弹子落在第三层（有几个竖直通道就算第几层）的通道里，按左、中、右的次序，分别有1，2，1个可能情形．不难看出，在再下面的一层（第四层），左、右两个通道都只有1个可能情形（因为只有当弹子是从第三层的左边或右边落下来时才有可能）；而中間的两个通道，由于它們可以接受从上一层的中間和一边（靠左的一个可以接受左边，靠右的一个可以接受右边）掉下来的弹子，所以它們所有的可能情形应該分别是第三层的中間和一边（左边或右边）的可能情形相加，即是3个可能情形．因此第四层的通道按从左到右的次序，分别有1,3,3,1个可能情形．

照同样的理由类推下去，我們很容易发現一个事实，就是任何一层的左右两边的通道都只有一个可能情形，而其他任

一个通道的可能情形,等于它左右肩上两个通道的可能情形相加. 这正是楊輝三角組成的規則. 于是我們知道,第 $n+1$ 层通道从左到右,分别有 $1, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^{n-1}, 1$ 个可能情形.

我們还可以这样来看上面的結論:如果在傾斜板上做了 $n+1$ 层通道;从頂上漏斗里放下 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1$ 顆弹子,讓它們自由地落下,掉在下面的 $n+1$ 个长方框里. 那末分配在各个框子中的弹子的正常数目(按照可能情形来計算),正好是楊輝三角的第 $n+1$ 行. 注意,这是指"可能性"而不是絕对如此. 这种現象称为概率現象.

以下我們来討論楊輝三角的一些应用.

二 二項式定理

和楊輝三角有最直接联系的是**二項式定理**. 学过初中代数的人都知道:

$$(a+b)^1=a+b,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

这里,$(a+b)^3$ 展开后的系数 1,3,3,1 就是楊輝三角第四行的数字. 不难算出 $(a+b)^6$ 的系数是 1,6,15,20,15,6,1, 即楊輝三角第七行的数字. 所以楊輝三角可以看做是二項式的乘方經过分离系数法后列出的表. 实际上,我們可以証明这样的事实:一般地說,$(a+b)^n$ 的展开式的系数就是楊輝三角中

第 $n+1$ 行的数字

$$1, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^r, \cdots, C_n^{n-1}, 1,$$

即

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r}b^r + \cdots + b^n.$$

这便是有名的二項式定理.

要証明这个定理并不难,我們可以采用一个在各門数学中都被广泛地应用到的方法——**数学归納法**. 数学归納法的用途是它可以推断某些在一系列的特殊情形下已經成立了的数学命題,在一般的情形是不是也眞确. 它的原理是这样的:

假如有一个数学命題,合于下面两个条件:(1)这个命題对 $n=1$ 是眞确的;(2)如設这个命題对任一正整数 $n=k-1$ 为眞确,就可以推出它对于 $n=k$ 也眞确. 那末这个命題对于所有的正整数 n 都是眞确的.

事实上,如果不是这样,就是說这个命題并非对于所有的正整数 n 都是眞确的,那末我們一定可以找到一个最小的使命題不眞确的正整数 m. 显然 m 大于 1,因为这个命題对 $n=1$ 已經知道是眞确的(条件(1)). 因此 $m-1$ 也是一个正整数. 但 m 是使命題不眞确的最小的正整数,所以命題对 $n=m-1$ 一定眞确. 这样就得出,对于正整数 $m-1$ 命題是眞确的,而对于紧接着的正整数 m 命題不眞确. 这和数学归

纳原理中的条件(2)相冲突.

数学归纳法是数学中一个非常有用的方法，我们在以后各节中还将不止一次地用到它．读者如果想详细了解这一原理和更多的例题，我建议去读另一本小册子《数学归纳法》[①]．但我想在这儿赘上一句：归纳法的难点不在于证明，而在于怎样预知结论．读者在做完归纳法的习题以后，试想一下这些习题人家是怎样想出来的！

现在我们就用数学归纳法来证明二项式定理．

从本节开头所列举出来的而为大家所熟知的恒等式（这些恒等式可以把它们的左边直接乘出而得到证明）可以看出，二项式定理对于 $n=1, 2, 3$ 的情形的确是成立的．这便满足了数学归纳法的条件(1)(其实只要对 $n=1$ 成立就够了)．另一方面，假设定理对任一正整数 $n=k-1$ 成立．那末，因为

$$\begin{aligned}
(a+b)^k &= (a+b)(a+b)^{k-1} \\
&= (a+b)(a^{k-1}+C_{k-1}^1 a^{k-2}b+\cdots \\
&\qquad +C_{k-1}^r a^{k-1-r}b^r+\cdots+b^{k-1}) \\
&= (a^k+C_{k-1}^1 a^{k-1}b+\cdots+C_{k-1}^r a^{k-r}b^r+\cdots+ab^{k-1}) \\
&\quad +(a^{k-1}b+\cdots+C_{k-1}^{r-1}a^{k-r}b^r+\cdots+C_{k-1}^{k-2}ab^{k-1}+b^k) \\
&= a^k+(1+C_{k-1}^1)a^{k-1}b+\cdots+(C_{k-1}^{r-1}+C_{k-1}^r)a^{k-r}b^r \\
&\qquad +\cdots+(C_{k-1}^{k-2}+1)ab^{k-1}+b^k,
\end{aligned}$$

① 《数学归纳法》，华罗庚著，上海教育出版社出版．

再由楊輝恆等式(注意 $C_{k-1}^0=C_{k-1}^{k-1}=1$),便得到:

$$(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+\cdots+C_k^ra^{k-r}b^r+\cdots+C_k^{k-1}ab^{k-1}+b^k.$$

所以条件 (2) 也是滿足的. 于是我們的定理用数学归納法得到了証明。

順便指出,由二項式定理可以得出一些有趣的等式,例如:

$$2^n=(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1,$$

$$0=(1-1)^n=[1+(-1)]^n$$

$$=1-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^n.$$

第一个等式說明楊輝三角的第 $n+1$ 行的数字的和等于 2^n;而第二个等式說明它們交錯相加相減,所得的数值是 0. 利用前一式,我們可以把第一节中图 1 所表示的結論講得更清楚些:如果倒进漏斗的小弹子数是 2^n,那末掉在第 $n+1$ 层各框子里的数目是 $1, C_n^1, \cdots, C_n^{n-1}, 1$ (注意概率現象).

三 开 方

楊輝三角在我国古代大多是用来作为开方的工具. 直到現在,我們在代数学中学到的开平方和开立方的方法,仍然是从楊輝三角中得来的。

譬如拿开平方来說吧,因为有等式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b,$$

所以我們可以把一个数的平方根分成几位数字来求:先求出

平方根的最高位数 a ①，再从原来的数减去初商 a 的平方而得出余数．如果原来的数可以表成 $(a+b)^2$ 的形式，那末这个余数一定能写成 $(2a+b)b$ 的样子．我們可用 $2a$ 去試除余数，看看商数是多少，然后定出平方根的第二位数（次高位数）b（b 一定不会大于 $2a$ 除余数的商）．假如 $(2a+b)b$ 刚好等于这个余数，那末原数的平方根就等于 $(a+b)$；不然的話，我們又可以把 $a+b$ 当成原来的 a，而将这一手續繼續进行下去．

同样，如果要求一个数的立方根，根据等式

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\&=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b,\end{aligned}$$

可以先求出它的最高位数 a，再从原来的数减去 a 的立方而得出余数．然后用 $3a^2$ 去試除余数，定出立方根的次高位数 b，再从余数减去 $(3a^2+3ab+b^2)b$．如果得到的新余数等于 0，那末立方根就是 $a+b$；不然的話，又可以把 $a+b$ 当成 a 而繼續进行这些步驟．

从理論上說，有了楊輝三角，就可以求任何数的任意高次方根，只不过是次数愈高，計算就愈加繁复罢了．下面我們举一个开 5 次方的例子：

例 求 1419857 的 5 次方根．

因为

$$\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\&=a^5+(5a^4+10a^3b+10a^2b^2+5ab^3+b^4)b,\end{aligned}$$

① 这里，十位数＝十位数字×10；百位数＝百位数字×100；以下类推．

所以有算式：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 10 + \quad 7 \cdots (a+b) \\
 & 14,19857 \\
 & 1,00000 \cdots a^5 \\
\hline
5a^4 \cdots\cdots 5\times 10^4 = 50000 & 13,19857 \\
10a^3b \cdots\cdots 10\times 10^3\times 7 = 70000 & \\
10a^2b^2 \cdots\cdots 10\times 10^2\times 7^2 = 49000 & \\
5ab^3 \cdots\cdots 5\times 10\times 7^3 = 17150 & \\
b^4 \cdots\cdots 7^4 = 2401 & \\
\hline
5a^4+10a^3b+10a^2b^2+5ab^3+b^4 \cdots\cdots 188551 & 13,19857 \cdots (5a^4+10a^3b+10a^2b^2+5ab^3+b^4)b, \\
\end{array}
$$

于是得出

$$\sqrt[5]{1419857}=17.$$

四 高阶等差級数

大家都知道，如果一个級数的每一項减去它前面的一項所得的差都相等，这个級数就叫做**等差級数**。但对于某些級数而言，这样得出来的差幷不相等，而是构成一个新的等差級数，那末我們就把它們叫做**二阶等差級数**。列成算式来說，二阶等差級数就是滿足条件

$$(a_3-a_2)-(a_2-a_1)=(a_4-a_3)-(a_3-a_2)$$
$$=\cdots=(a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})=\cdots$$

的級数，而这里的$a_1, a_2, \cdots, a_n$分别是这个級数的第1，第2，…，第n項。同样，如果一个級数的各項同它的前一項

的差构成一个二阶等差級数，便叫做三阶**等差級数**。这个定义很自然地可以推广到一般的情形：設 r 是一个正整数，所謂 r 阶等差級数就是这样的級数，它的各項同它的前一項的差构成一个 $r-1$ 阶等差級数。二阶以上的等差級数我們总称**高阶等差級数**。

高中程度的讀者都熟悉求等差級数的和的公式。本节的任务就是利用楊輝三角来討論一般的高阶等差級数的和。

我們先从以下的一批公式入手：

$$1+1+1+\cdots+1=n,$$

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1),$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2),$$

$$1+4+10+\cdots+\frac{1}{3!}(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$=\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3),$$

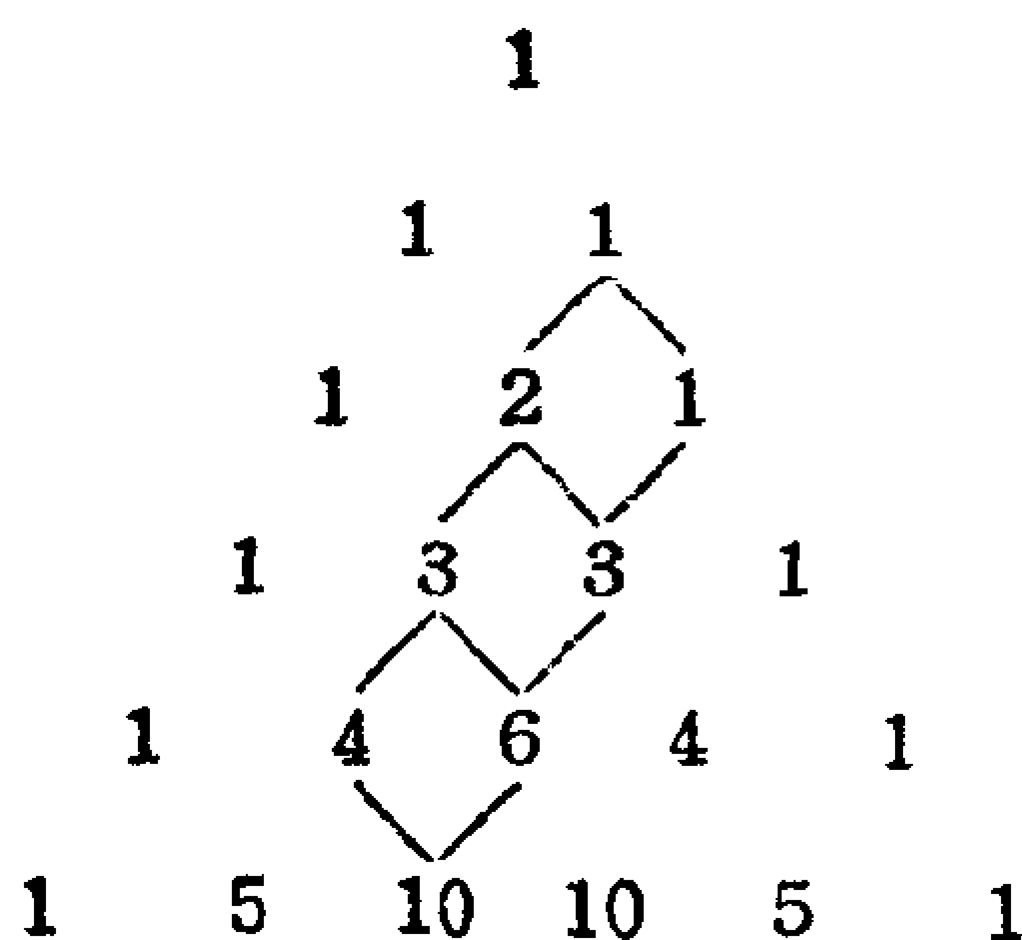
…………………………………………………………

一般性的公式可以猜到应当是：

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_{n-1}^r=C_n^{r+1},(n>r). \quad (1)$$

上面列举的式子分别是 $r=0,1,2,3$ 的情形。

这些恆等式的正确性可以从楊輝三角中直接看得出来。因为楊輝三角的基本性質是：其中任一数等于它左右肩上的二数的和。我們从图中一个确定的数开始，它是它左右肩上的二数的和；然后把左肩固定，而考虑右肩，它又是它的左右



肩上的二数的和．这样推上去，总是把左肩固定，而对右肩运用这个规则，最后便得出：从一数的“左肩”出发，向右上方作一条和左斜边平行的直綫，位于这条直綫上的各数的和等于該数．如果选择楊輝三角的第$n+1$行的第$r+1$个数作为开始的数，那末这里的結果正就是我們所要証明的恆等式(1)．图中所举的例子是

$$10=4+6=4+(3+3)=4+[3+(2+1)],$$

即得

$$1+2+3+4=10.$$

用数学归納法来証明恆等式(1)也是不困难的，不过得首先說明一点：在数学归納原理中，如果把条件(1)中的$n=1$改成$n=a$（a是一个确定的正整数)，而条件(2)对于任一大于a的正整数都适合，那末同样可以証明命題对于所有大于或等于a的正整数n都是眞确的(我們讓讀者去补出詳細的証明)．

現在我們就在作了这样說明的基础上来对恆等式(1)中的n施行归納法．当$n=r+1$时，(1)式的左边是1，而右边是$C_{r+1}^{r+1}=1$，所以是眞确的．又假定(1)式对$n=k$ ($k>r$)眞确，即

$$C_r^r+C_{r+1}^r+\cdots+C_{k-1}^r=C_k^{r+1},$$

那末就有

$$C_r^r+C_{r+1}^r+\cdots+C_{k-1}^r+C_k^r=C_k^{r+1}+C_k^r;$$

再由楊輝恆等式,上式的右边又等于 C_{k+1}^{r+1},所以推出(1)式对于 $n=k+1$ 的真确性. 这样,归納原理的两个条件都已滿足,于是可以断言,(1)式对于所有大于 r 的正整数 n 都是成立的.

依据同一原則,还可以把(1)式的証明写成

$$\begin{aligned}&C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_{n-2}^r+C_{n-1}^r\\&\quad=C_{r+1}^{r+1}+(C_{r+2}^{r+1}-C_{r+1}^{r+1})+(C_{r+3}^{r+1}-C_{r+2}^{r+1})\\&\qquad\quad+\cdots+(C_{n-1}^{r+1}-C_{n-2}^{r+1})+(C_n^{r+1}-C_{n-1}^{r+1})\\&\quad=C_n^{r+1}.\end{aligned}$$

为了便于記忆,(1)式也可以改写成为

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_{r+n-1}^r=C_{r+n}^{r+1};\tag{2}$$

在 $r=1, 2, 3$ 的情形,这就分别是等式

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

$$\begin{aligned}1+4+10+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\\=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

讀者試証:(2)式是一个 r 阶等差級数.

有了这些公式,我們就能够研究一切高阶等差級数的問題. 在未討論一般情形之前,先举几个例子:

例1 求等差級数的前 n 項的和.

以 a 为首項和以 d 为公差的等差級数的一般項是 $a+(k-1)d$,根据上面已有的公式,就有

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot d)$$
$$=a(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{ 个}})+d(1+2+\cdots+\overline{n-1})$$
$$=na+\frac{1}{2}n(n-1)d=\frac{1}{2}n(2a+\overline{n-1}\cdot d).$$

这个結果是我們所熟知的.

例2 求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和.

把 k^2 写成为 $2\cdot\frac{1}{2}k(k-1)+k$, 而一般項为 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 和 k 的級数是已有公式可以求和的,所以

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$
$$=2(0+1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n\cdot\overline{n-1})+(1+2+3+\cdots+n)$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

例3 求 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 的和①.

把 k^3 写成为 $6\cdot\frac{1}{6}k(k-1)(k-2)+6\cdot\frac{1}{2}k(k-1)+k$. 以 $\frac{1}{6}k(k-1)(k-2)$, $\frac{1}{2}k(k-1)$, k 为一般項的級数都包含在已有的公式里,所以

---

① 求这个和的公式,在我国元代的数学家朱世杰所著的《四元玉鉴》一書(1303年)中便已发现,比西洋最早得出这个公式的德国数学家来本尼兹(Leibniz)要早三百多年.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$
$$=6\cdot\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)$$
$$+6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)[(n-1)(n-2)+4(n-1)+2]$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)n(n+1)=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

由此可見，

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

由上面的几个例子很容易看出，要求一个級数的和，可以先把它的一般項用公式中諸級数的一般項表出来，再分別用公式求得。很自然地会发生这样的疑問：对于任何一个以 k 的多項式为一般項的級数，这种表法常是可能的嗎？如果可能的話，又怎样求出它的表示式呢？这就是在下面两节中要解决的中心問題。

五 差分多項式

我們先引进一些新的概念。

定义1 如果 $f(x)$ 是 x 的多項式，那末多項式

$$f(x+1)-f(x)$$

称为 $f(x)$ 的**差分**，用 $\triangle f(x)$ 表示它。$\triangle f(x)$ 的差分叫做 $f(x)$ 的**二級差分**，用 $\triangle^2 f(x)$ 表示它；所以

$$\triangle^2 f(x)=\triangle[f(x+1)-f(x)]$$
$$=f(x+2)-2f(x+1)+f(x).$$

又用 $\triangle^3 f(x)$ 表示 $\triangle^2 f(x)$ 的差分，叫做 $f(x)$ 的**三級差分**；显然有

$$\triangle^3 f(x)=f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x).$$

一般地，我們定义 $f(x)$ 的 r 級差分 $\triangle^r f(x)$ 是它的 $r-1$ 級差分 $\triangle^{r-1} f(x)$ 的差分。

不难証出：

$$\triangle^r f(x)=f(x+r)-C_r^1 f(x+r-1)+C_r^2 f(x+r-2)-\cdots+(-1)^r f(x). \qquad (1)$$

要証明这个公式可以用数学归納法。我們已知这个公式当 $r=1,2,3$ 时都眞确。假定它对 $r=k-1$ 仍眞确，即

$$\triangle^{k-1} f(x)=f(x+k-1)-C_{k-1}^1 f(x+k-2)+C_{k-1}^2 f(x+k-3)-\cdots+(-1)^{k-1} f(x),$$

那末根据定义得出，

$$\begin{aligned}\triangle^k f(x)&=\triangle[\triangle^{k-1} f(x)]\\&=[f(x+k)-C_{k-1}^1 f(x+k-1)\\&\quad+C_{k-1}^2 f(x+k-2)-\cdots+(-1)^{k-1} f(x+1)]\\&\quad-[f(x+k-1)-C_{k-1}^1 f(x+k-2)+\cdots\\&\quad+(-1)^{k-2}C_{k-1}^{k-2} f(x+1)+(-1)^{k-1} f(x)].\end{aligned}$$

合并相同的項，由楊輝恒等式立得

$$\triangle^k f(x)=f(x+k)-C_k^1 f(x+k-1)+C_k^2 f(x+k-2)-\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1} f(x+1)+(-1)^k f(x).$$

所以(1)式对于任何正整数 r 都是眞确的。

如果 $f(x)$ 是一个 m 次多项式，那末 $\Delta f(x)$ 是一个 $(m-1)$ 次多項式；再依次推下去，就知道 $\Delta^m f(x)$ 是一个常数。因此，如果 $r > m$，那末 $\Delta^r f(x)=0$. 从这里还很容易看出如下的事实：以 k 的 m 次多項式 $f(k)$ 为一般項的級数

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)$$

是一个 m 阶等差級数（只須注意 $f(k)$ 的差分是級数的第 $k+2$ 項和第 $k+1$ 項的差）.

讀者試算出：

$$\Delta^{m-1}x^m=m!\left[x+\frac{1}{2}(m-1)\right],\Delta^m x^m=m!.$$

定义 2　多項式

$$P_k(x)=\frac{1}{k!}x(x-1)\cdots(x-k+1),k\geqslant 1;P_0(x)=1,$$

称为**k 次差分多項式**.

当 x 是一个大于或等于 k 的正整数 n 时，

$$P_k(n)=C_n^k,$$

这是一个整数；当 x 是一負整数 $-m$ 时，

$$P_k(-m)=(-1)^k\frac{(m+k-1)(m+k-2)\cdots(m+1)m}{k!}$$

$$=(-1)^k C_{m+k-1}^k$$

也是一个整数；当 $x=0,1,\cdots,k-1$ 时，

$$P_k(x)=0.$$

显然有：

$$P_k(x+1)-P_k(x)$$

$$=\frac{1}{k!}[(x+1)x\cdots(x-k+2)-x(x-1)\cdots(x-k+1)]$$

$$=\frac{1}{k!}x(x-1)\cdots(x-k+2)[x+1-(x-k+1)]$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}x(x-1)\cdots(x-k+2),$$

即
$$\boxed{\triangle P_k(x)=P_{k-1}(x).} \qquad (2)$$

这是楊輝恆等式的推广，也是差分多項式的基本性質。

差分多項式的另一性質是：当 x 取任一整数值时，$P_k(x)$ 也是整数。因此显然有：如果 $a_k, a_{k-1}, \cdots, a_0$ 都是整数，那末当 x 取整数值时，多項式

$$f(x)=a_kP_k(x)+a_{k-1}P_{k-1}(x)+\cdots+a_1P_1(x)+a_0 \qquad (3)$$

也取整数值。具有这种性質的多項式称为整值多項式(例如任何以整数为系数的多項式都是整值多項式)。我們現在进一步去証明，任一个 k 次整値多項式一定可以表成为(3)的形式。

先証明：任一个 k 次多項式可以表成为

$$f(x)=\alpha_kP_k(x)+\alpha_{k-1}P_{k-1}(x)+\cdots+\alpha_1P_1(x)+\alpha_0, \qquad (4)$$

这里的 $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \cdots, \alpha_0$ 不一定是整数。

要証明这一点并不困难，因为我們可以这样定出 α_k，使 $f(x)-\alpha_kP_k(x)$ 成为低于 k 次的多項式；这样陆續減去，即得所求。說得更严格一点，可以用数学归納法：当 $f(x)$ 是一个1次多項式时，由于 $f(x)=\alpha x+\beta=\alpha P_1(x)+\beta$，这个結論显然是对的。再假定任一个 $(k-1)$ 次的多項式都可以表成为(4)的形式，那末，設 $f(x)$ 的 x^k 的系数是 α，显然 $f(x)-k!\alpha P_k(x)$ 是一个 $(k-1)$ 次的多項式。于是

$$f(x)-k!\alpha P_k(x)=\alpha_{k-1}P_{k-1}(x)+\cdots+\alpha_1P_1(x)+\alpha_0,$$

移項并令 $k!\alpha=\alpha_k$，即得(4)式。

若(4)是整值多項式，以 $x=0$ 代入，即得 $f(0)=a_0$ 是整数；再以 $x=1$ 代入，得 $f(1)=a_1+a_0$ 是整数，所以 a_1 是整数．而

$$f(x)-a_0-a_1P_1(x)$$
$$=a_kP_k(x)+a_{k-1}P_{k-1}(x)+\cdots+a_2P_2(x)$$

也是整值多項式． 又以 $x=2$ 代入，可知 a_2 是整数． 再研究整值多項式

$$f(x)-a_0-a_1P_1(x)-a_2P_2(x)$$
$$=a_kP_k(x)+a_{k-1}P_{k-1}(x)+\cdots+a_3P_3(x),$$

以 $x=3$ 代入，可知 a_3 也是整数．依照这个法則繼續进行，可得所有的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_k$ 都是整数．

有了表示式(4)，要求以 k 次多項式 $f(x)$ 为一般項的高阶等差級数的和就很容易了．事实上，如果

$$f(x)=a_kP_k(x)+a_{k-1}P_{k-1}(x)+\cdots+a_1P_1(x)+a_0,$$

根据上一节中已經証明了的一系列"标准"高阶等差級数的公式(注意当 $m\geqslant r$ 时，$P_r(m)=C_m^r$；当 $m<r$ 时，$P_r(m)=0$)，就有

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$
$$=a_kP_{k+1}(n+1)+a_{k-1}P_k(n+1)+\cdots$$
$$+a_1P_2(n+1)+a_0(n+1).$$

最后还剩下一个問題，就是：任何一个高阶等差級数的一般項是不是常常能够表成为一个多項式？运用本节所介紹的知識，这一点是不难証明的，我們把它留給讀者作为一个习題．

六 逐差法

我們已經証明了任一多項式 $f(x)$ 可以表成为

$$f(x)=a_kP_k(x)+a_{k-1}P_{k-1}(x)+\cdots+a_1P_1(x)+a_0. \quad (1)$$

但是如果按照証明中所用的方法去实际計算 $a_0,a_1,\cdots,a_k$，那还是一件相当麻煩的事。現在我們給出一个比較簡便的办法，直接求出这些系数。

显然 $f(0)=a_0$。作(1)的差分，由推广的楊輝恆等式得到：

$$\triangle f(x)=a_kP_{k-1}(x)+a_{k-1}P_{k-2}(x)+\cdots+a_2P_1(x)+a_1.$$

命 $x=0$，那末有：

$$(\triangle f(x))_{x=0}=a_1,$$

也就是

$$f(1)-f(0)=a_1.$$

同样因为

$$\triangle^2 f(x)=\triangle(\triangle f(x))=a_kP_{k-2}(x)+\cdots+a_3P_1(x)+a_2,$$

所以

$$(\triangle^2 f(x))_{x=0}=f(2)-2f(1)+f(0)=a_2.$$

这样一直做下去，不难得到：

$$(\triangle^r f(x))_{x=0}=f(r)-C_r^1f(r-1)+C_r^2f(r-2)-\cdots+(-1)^rf(0)=a_r, (r=1,2,\cdots,k).$$

因此，关于如何具体算出 $a_0,a_1,\cdots,a_k$，有以下的方法：先把 $f(0),f(1),f(2),\cdots,f(k)$ 的数值写下，再求后項減前項的差值，于是得出 $f(1)-f(0)$，$f(2)-f(1)$，$\cdots$，

$f(k)-f(k-1)$；又求这些差值的后项減前項的差值，等等。从而得出如下的**逐差表**：

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\cdots,\ f(k-1),\ f(k)$$

$$f(1)-f(0),\ f(2)-f(1),\ f(3)-f(2),\ \cdots,\ f(k)-f(k-1)$$

$$f(2)-2f(1)-f(0),\ \cdots\cdots,\ f(k)-2f(k-1)+f(k-2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(k)-C_k^1f(k-1)+C_k^2f(k-2)-\cdots+(-1)^kf(0)$$

于是 a_0 是上表中第一行最左边的数字，a_1是第二行最左边的数字，等等。

例如若$f(x)=x^3$，那末上面的表变成：

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & & 1, & & 8, & & 27 \\ & 1, & & 7, & & 19 & \\ & & 6, & & 12 & & \\ & & & 6 & & & \end{array}$$

所以得出：

$$n^3=0\cdot1+1\cdot n+6\cdot\frac{n(n-1)}{2}+6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

这正是第四节中例 3 的情形。

从本节的結果还可以看出，如果一个 k 次多項式对于連續 $k+1$ 个整数都取整数值，那末它就是一个整值多項式。

七 堆垛术

高阶等差級数的一个重要应用是所謂**堆垛問題**，在西洋又叫它做“积弹”。現在举几个我国古代数学家所做的問題作为例子。

例 1（宋，沈括，1030-1094）．酒店里把酒罎层层堆积，底层排成一长方形；以后每上一层，长和宽两边的罎子各少一个，这样堆成一个长方台形（图 2）．求酒罎的总数．

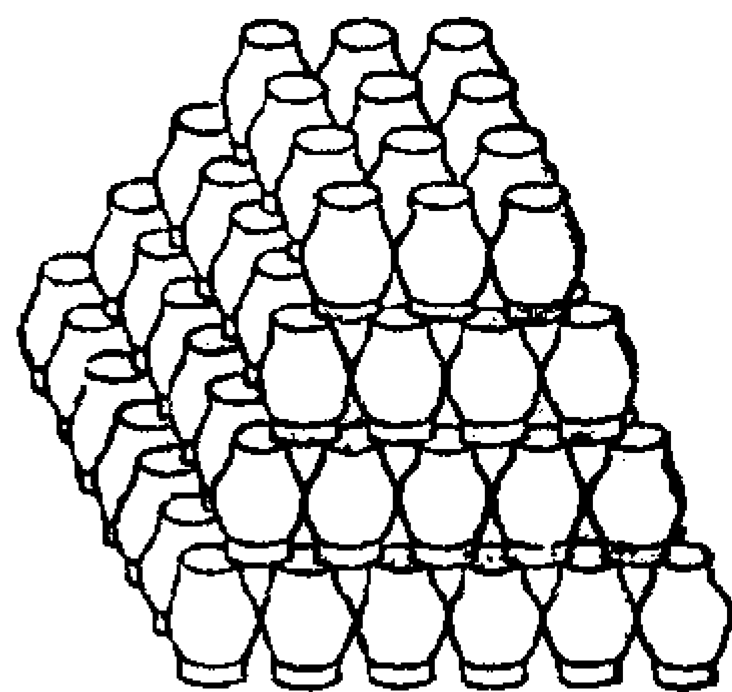


图 2.

設底层的长和寬两边分别摆 a 和 b 个罎子，又設一共堆了 n 层．那末，酒罎的总数

$$S=ab+(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)+\cdots+(a-n+1)(b-n+1).$$

因为

$$\begin{aligned}(a-k+1)(b-k+1)&=k^2-(a+b+2)k+(a+1)(b+1)\\&=2\left[\frac{1}{2}k(k-1)\right]-(a+b+1)k+(a+1)(b+1),\end{aligned}$$

由第四节的高阶等差級数的基本公式，立刻得出：

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)-\frac{1}{2}(a+b+1)(n+1)n+(a+1)(b+1)n\\&=\frac{1}{6}n[2n^2-3(a+b+1)n+6ab+3a+3b+1].\end{aligned}$$

特别是如果 $a=b=n$，那末所堆成的"垜"叫做"正方垜"，这时的总数就是

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

例 2（宋，楊輝，1261）．将圓弹堆成三角垜：底层是每边 n 的三角形，向上逐层每边少一个，頂层是一个．求总数．

根据第四节的公式，很容易算出总数

$$S=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+n)$$
$$=1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

例 3（元，朱世杰，1303）. 撒星形：由底层每边从 1 个到 n 个的 n 只三角垛集合而成（图 3）. 求总数.



图 3.

根据上例的結果，得出总数

$$S=1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left[1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right]$$
$$=1+4+10+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

例 4 食品罐头若干个，堆成六角垛：頂层是一个，以下各层都是正六角形，每边递增一个（图 4）. 設底层每边是 n 个. 求总数.

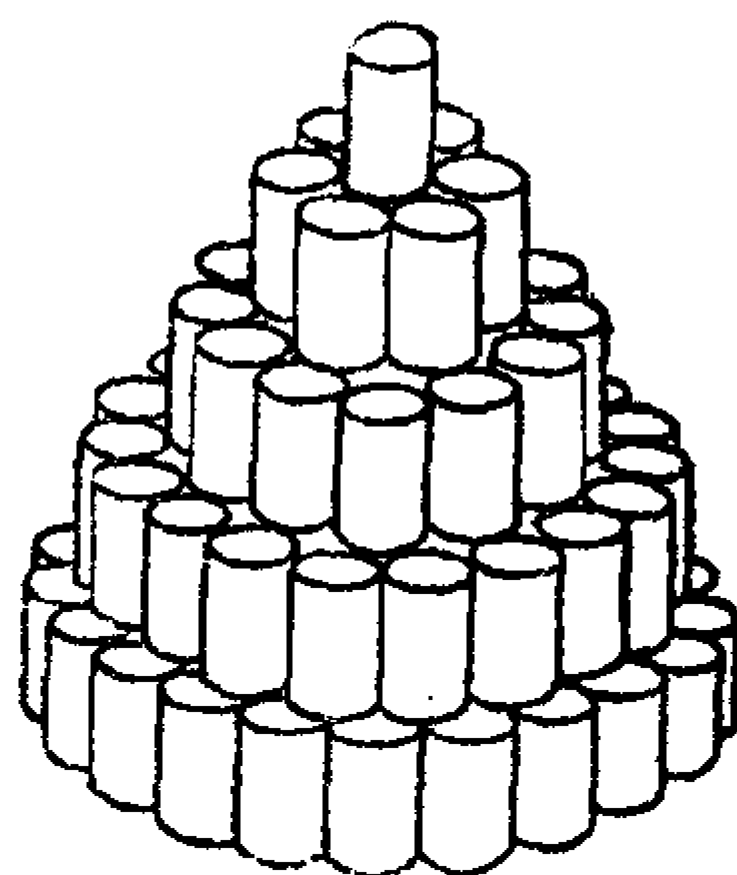


图 4.

先算出底层罐头的个数 S'. 这种方法我国古代叫“束物术”. 事实上，底层的罐头除中心的一个外，其余的构成一个公差是 6 的等差級数，它的首項是 6（即

围繞中心的6个)，末項是$6(n-1)$(即最外一层罐头的数目)。所以

$$S' = 1+6+12+\cdots+6(n-1)$$
$$= 1+6[1+2+\cdots+(n-1)]$$
$$= 1+6\cdot\frac{n(n-1)}{2} = 1+3n(n-1).$$

于是得出罐头的总数

$$S = 1+(1+3\cdot2\cdot1)+(1+3\cdot3\cdot2)$$
$$+(1+3\cdot4\cdot3)+\cdots+[1+3n(n-1)]$$
$$= (1+1+1+\cdots+1)+3[2\cdot1+3\cdot2$$
$$+4\cdot3+\cdots+n(n-1)]$$
$$= n+6\left(1+3+6+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$= n+(n-1)n(n+1) = n(1+n^2-1) = n^3.$$

讀者試求出：当頂层不是一个而是每边是k个的正六角形时，罐头的总数是多少。

八　混合級数

我們已經对高阶等差級数作了研究。在中学的代数課程里面，我們还学到过另一类很重要的級数——等比級数。所謂等比級数，就是級数中的每一項和它的前一項的比值等于一个常数；我們把这个常数叫做这个級数的公比。如果已經知道了一个等比級数的首項和公比，就能求出它的任一項以及它的和。例如

$$S_0 = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$$

是一个公比是x的等比級数。要求它的和S_0，可以将上面級

数中的每一項乘以 x，得到

$$xS_0=x+x^2+x^3+\cdots+x^n;$$

从 S_0 减去 xS_0，有

$$(1-x)S_0=1-x^n.$$

如果 $x\neq1$，从上式就得到

$$S_0=\frac{1-x^n}{1-x}.$$

把高阶等差級数和等比級数結合起来加以考虑，很自然地会引导出这样的問題：如果 $f(y)$ 是一个 k 次多項式，我們能不能求出級数

$$f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\cdots+f(n-1)x^{n-1}$$

的和呢？

回答是肯定的。

和前面的第四节一样，我們可以先来考虑以下一些特殊級数的和：

$$S_1=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1},$$

$$S_2=1+3x+6x^2+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1},$$

$$S_3=1+4x+10x^2+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)x^{n-1},$$

…………………………………………………………

一般的是

$$S_r=C_r^r+C_{r+1}^r x+C_{r+2}^r x^2+\cdots+C_{r+n-1}^r x^{n-1}.$$

如果 $x=1$，那末它們正就是我們在第四节中討論过的高阶等差級数，因而在以下的討論中，我們总假定 $x\neq1$。

求和数 $S_1,S_2,S_3,\cdots$ 的方法，和上面求 S_0 的方法是类似

的．因为

$$xS_1=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n,$$

所以

$$(1-x)S_1=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n=S_0-nx^n,$$

于是根据 S_0 的結果，得到

$$S_1=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}.$$

用同样的办法又很容易算出：

$$(1-x)\,S_2=S_1-\frac{1}{2}n(n+1)x^n,$$

从而得到

$$S_2=\frac{1-x^n}{(1-x)^3}-n\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{1}{2}n(n+1)\frac{x^n}{1-x}.$$

这样依次算下去，只要知道求和数 S_{r-1} 的公式，就可以把和数 S_r 算出来．于是对于上面的一些特殊的混合級数，我們的問題算是解决了．

再根据第五节的結果，任一个 k 次多項式 $f(y)$ 总可以表成为：

$$f(y)=a_kP_k(y)+a_{k-1}P_{k-1}(y)+\cdots+a_1P_1(y)+a_0,$$

这里 $P_r(y)$ 是 y 的 r 次差分多項式．因此由差分多項式的性質，一般的混合級数也可以求和．

九　无穷級数的概念

以上我們所討論到的都只是有限項的級数，但是在有些时候，特别是在高等数学中，更重要的却是当級数的項数 n 增

加到无穷时的情形。

試以等比級数为例。我們已經知道

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x},(x\neq 1);$$

如果$-1<x<1$,那末当n变得很大的时候,x^n变得很小而非常接近于0,从而級数的和非常接近于$\frac{1}{1-x}$。这时我們就說:无穷級数

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$$

是收斂的,而且它的和就是$\frac{1}{1-x}$。

一般地說,一个无穷級数的项是依某一規則排列的;如果它的前面任意有限項的和随着項数的无限增大而非常接近于一个确定的数目,那末这个无穷級数就叫做是收斂的,而这个确定的数目就是它的和。

从上面的例子还可以看出:如果一个无穷級数的项和变数x有关,那末为了保証这个級数是收斂的,需要把x限制在一定的范围之內。事实上,假如例子中的x大于1或小于-1,于是当n愈来愈大的时候,x^n也随之愈来愈大。这时級数的和就不再接近于一个确定的数目,而趋向于无穷了。

关于无穷級数的概念,在我国古代的著作中就巳經有了。例如在公元前300年左右我国著名的哲学家庄周所著的«庄子·天下第三十三篇»里面,就有"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的說法。翻譯成白話就是:一根一尺长的杖,今天取它的一半,明天取剩下的杖的一半,后天再取剩下的杖的一半,…这样継續下去,总沒有取完的时候。我們可以把这件事列成数学式子,那末所取棰的总长是无穷級数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

的和。这是一个公比是$\frac{1}{2}$的等比級数，由前面的公式，我們知道它的和等于

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 2=1,$$

即是棰的原长。不过事实上我們是取不到无穷次的；因此只可能把取的次数尽量增多，使得剩下的部分非常之小而接近于0，但总不能达到0。这便是"万世不竭"的意思。

在西洋的古代数学中也有类似的例子。最有趣的例子之一就是所謂齐諾(Zeno)的詭辯，或者叫做亚其尔(Archilles)和龟的問題。亚其尔是希腊传說中一个善走的神，可是齐諾却說在某种情况下他甚至于永远赶不上一只烏龟。齐諾所持的理由是这样的：假定亚其尔的速度是烏龟的10倍，开始的时候他在龟的后面10里。当亚其尔走完这10里时，在这段时間內，龟已向前走了1里。而当亚其尔再走完这1里时，龟又向前走了$\frac{1}{10}$里。这样推論下去，亚其尔每赶上龟一段路程，龟又向前走了这段路程的$\frac{1}{10}$那么长的路。于是亚其尔和龟之間总有一段距离，而始終追不上这只烏龟。

可是任何人都知道事实并不是这样的。那末齐諾的错誤在什么地方呢？很容易看出来，错誤就在于他把亚其尔追赶烏龟的路程任意地分成无穷多段，而且断言說：要走完这无穷多段的路程，就非要有无限长的时間不可。

讓我們对亚其尔追赶烏龟所需的时間作同样的分析。不

妨設亚其尔的速度是每小时走 10 里．于是按照上面的分段，走完第一段所需的时間是 1 小时，走完第二段是$\frac{1}{10}$小时，走完第三段是$\frac{1}{10^2}$小时，…．因此追上烏龟所需的时間就是无穷級数

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1\frac{1}{9}\text{（小时）}.$$

这和我們用算术或代数方法算出的答数是一致的．所以齐諾的謬誤就是显然的了．

一〇　无穷混合級数

在前节中我們已經得到这样的結果：如果 $-1<x<1$，那末

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

从这个事实出发，我們可以証明以下一系列的无穷混合級数的公式在 $-1<x<1$ 时成立：

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$1+3x+6x^2+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^3},$$

……………………………………………………

或者一般地写为

$$C_r^r+C_{r+1}^r x+C_{r+2}^r x^2+\cdots+C_{r+n-1}^r x^{n-1}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(1-x)^{r+1}},\ (r=0,1,2,3,\cdots).$$

要証明这些等式，可以对 r 用归納法：

当 $r=0$ 时，这就是等比級数的公式。

当 $r=1$ 时，因为

$$
\begin{aligned}
&(1-x)(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots)\\
&\quad=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\\
&\qquad-(x+2x^2+\cdots+(n-1)n^{n-1}+\cdots)\\
&\quad=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x},
\end{aligned}
$$

所以有：

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

現在假定对于正整数 $r=k-1$ 公式成立，即有：

$$C_{k-1}^{k-1}+C_k^{k-1}x+C_{k+1}^{k-1}x^2+\cdots+C_{k+n-2}^{k-1}x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^k};$$

那末由楊輝恆等式，

$$
\begin{aligned}
&(1-x)(C_k^k+C_{k+1}^k x+C_{k+2}^k x^2+\cdots\\
&\qquad\qquad+C_{k+n-2}^k x^{n-2}+C_{k+n-1}^k x^{n-1}+\cdots)\\
&=C_k^k+C_{k+1}^k x+C_{k+2}^k x^2+\cdots+C_{k+n-1}^k x^{n-1}+\cdots\\
&\qquad-(C_k^k x+C_{k+1}^k x^2+\cdots+C_{k+n-2}^k x^{n-1}+\cdots)\\
&=C_k^k+(C_{k+1}^k-C_k^k)x+(C_{k+2}^k-C_{k+1}^k)x^2+\cdots\\
&\qquad+(C_{k+n-1}^k-C_{k+n-2}^k)x^{n-1}+\cdots\\
&=C_{k-1}^{k-1}+C_k^{k-1}x+C_{k+1}^{k-1}x^2+\cdots\\
&\qquad+C_{k+n-2}^{k-1}x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^k}.
\end{aligned}
$$

于是得到：

$$C_k^k+C_{k+1}^k x+C_{k+2}^k x^2+\cdots+C_{k+n-1}^k x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

这便是我們所要証明的.

不过在上面的运算过程中,我們还得郑重声明一点,就是我們必須事先知道这些級数在$-1<x<1$的时候都是收斂的。判定它們的收斂性需要用到高等数学的知識,在这里就只好略去了.

讀者自然不难从已經証明的公式和差分多項式的知識来导出求一般无穷混合級数的和的公式(x仍然要限制在-1和1之間).

我們只举两个例子.

例 1 設$-1<x<1$,求以下无穷級数的和:

$$S=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots.$$

因为

$$n^2=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n,$$

所以

$$S=2\left[1+3x+6x^2+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1}+\cdots\right]$$
$$-(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots)$$
$$=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3},\quad -1<x<1.$$

例 2 設$-1<x<1$,求以下无穷級数的和:

$$S=1+2^3x+3^3x^2+\cdots+n^3x^{n-1}+\cdots.$$

因为

$$n^3=6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n,$$

所以

$$S=6\left(1+4x+10x^2+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)x^{n-1}+\cdots\right)$$
$$-6\left[1+3x+6x^2+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1}+\cdots\right]$$
$$+(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots)$$
$$=\frac{6}{(1-x)^4}-\frac{6}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{6-6(1-x)+(1-x)^2}{(1-x)^4}=\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4},\ -1<x<1.$$

一一 循环級数

我們还可以定义一类更加广泛的級数，把前面所討論过的高阶等差級数和混合級数都包含在内，这就是所謂**循环級数**.

我們把一个任意的級数写成如下的形式：

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots. \qquad (1)$$

如果存在一个正整数 k 和 k 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，使得关系式

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots+a_ku_n$$

对所有的非負整数 n 都成立，那末級数 (1) 就叫做 **k 阶循环級数**，而上面的方程式叫做 **k 阶循环方程式.**

換句話說，一个 k 阶循环級数的特征就是：它的任一項(除了最前面的 k 項以外)都可以表成它前面 k 項的一次式，而这个一次式的系数不因項的变动而改变.

对于带有 x 的羃次的級数

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots, \qquad (2)$$

我們要将上面的定义略加修改. 这时候，級数(2)成为 k 阶循环級数的条件是：存在一个正整数 k 和 k 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$,

使得关系式

$$u_{n+k}x^{n+k}=a_1x(u_{n+k-1}x^{n+k-1})$$
$$+a_2x^2(u_{n+k-2}x^{n+k-2})+\cdots+a_kx^k(u_nx^n)$$

对所有的非負整数 n 成立；同时称多项式

$$1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k$$

为級数(2)的**特征多項式**.

为了更清楚地說明这个定义的意义，我們举几个例子.

例 1 以 d 为公差的等差級数

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+nd)+\cdots.$$

这时 $u_0=a,\quad u_1=a+d,\quad u_2=a+2d,\cdots,$

$$u_n=a+nd,\cdots.$$

由
$$u_{n+2}=u_{n+1}+d$$
和
$$u_{n+1}=u_n+d,$$
得出
$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n.$$

所以等差級数是二阶循环級数.

例 2 以 x 为公比的等比級数

$$a+ax+ax^2+\cdots+ax^n+\cdots.$$

这时按照第二种定义的形式，

$$u_0=u_1=u_2=\cdots=u_n=\cdots=a.$$

因为
$$u_{n+1}x^{n+1}=x(u_nx^n),$$

所以它是一阶循环級数，而它的特征多項式是 $1-x$.

例 3 一般的高阶等差級数

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+\cdots,$$

这里 $f(n)$ 是一个 n 的 k 次多項式.

这时 $u_0=f(0),\quad u_1=f(1),\quad u_2=f(2),$

$$\cdots,\quad u_n=f(n),\quad \cdots.$$

因为任一个 k 次多項式的 $k+1$ 級差分等于 0，根据第五节所証明的公式，有

$$\begin{aligned}\triangle^{k+1}f(n)&=f(n+k+1)-C_{k+1}^{1}f(n+k)\\&\quad+C_{k+1}^{2}f(n+k-1)-\cdots+(-1)^{k+1}f(n)\\&=0;\end{aligned}$$

移項便得到循环方程式

$$u_{n+k+1}=C_{k+1}^{1}u_{n+k}-C_{k+1}^{2}u_{n+k-1}+\cdots-(-1)^{k+1}u_n.$$

所以我們証明了任一个 k 阶等差級数是 $k+1$ 阶的循环級数.

例 4 一般的混合級数

$$f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\cdots+f(n)x^n+\cdots.$$

由例 3 很容易看出它也是一个 $k+1$ 阶的循环級数（k 是多項式 $f(n)$ 的次数），而它的特征多項式是

$$1-C_{k+1}^{1}x+C_{k+1}^{2}x^2-\cdots+(-1)^{k+1}x^{k+1}=(1-x)^{k+1}.$$

例 3 和例 4 是分别包括例 1 和例 2 的.

現在的問題是：怎样去求一个循环級数的和呢？

我們先来考虑循环級数

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots.$$

設

$$1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k$$

是它的特征多項式，且令

$$S_n=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n,\ n\geqslant k.$$

那末

$$(1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k)S_n$$
$$=[u_0+(u_1-a_1u_0)x+(u_2-a_1u_1-a_2u_0)x^2+\cdots$$
$$+(u_{k-1}-a_1u_{k-2}-a_2u_{k-3}-\cdots-a_{k-1}u_0)x^{k-1}]$$
$$+[(u_k-a_1u_{k-1}-a_2u_{k-2}-\cdots-a_ku_0)x^k+\cdots$$
$$+(u_n-a_1u_{n-1}-a_2u_{n-2}-\cdots-a_ku_{n-k})x^n]$$
$$-[(a_1u_n+a_2u_{n-1}+\cdots+a_ku_{n-k+1})x^{n+1}+\cdots+a_ku_nx^{n+k}].$$

但由于循环的条件，这儿第二个方括弧里面的項都等于 0，所以得出 S_n 等于

$$\frac{u_0+(u_1-a_1u_0)x+\cdots+(u_{k-1}-a_1u_{k-2}-\cdots-a_{k-1}u_0)x^{k-1}}{1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k}$$
$$-\frac{(a_1u_n+a_2u_{n-1}+\cdots+a_ku_{n-k+1})x^{n+1}+\cdots+a_ku_nx^{n+k}}{1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k}.$$

如果上面的級数对于一定范圍內的 x 是收斂的，那末它的第 n 項将随着 n 的增大而接近于 0．于是无穷級数的和：

$$S_\infty=\frac{u_0+(u_1-a_1u_0)x+\cdots+(u_{k-1}-a_1u_{k-2}-\cdots-a_{k-1}u_0)x^{k-1}}{1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k}.$$

如果 1 不是特征多項式 $1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k$ 的根，那末在求得的 S_n 和 S_∞ 中置 $x=1$（如果收斂的話），就得到和数

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$$

和
$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots.$$

我們讓讀者証明逆的命題：如果

$$P(x)=1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k,$$

而 $Q(x)$ 是任何一个次数小于 k 的多項式，那末 $\frac{Q(x)}{P(x)}$ 按 x 的升冪排列所得的商是一个以 $P(x)$ 为特征多項式的循环級数．

一二　循环級数的一个例子
——斐波那契級数

上节中已經举了循环級数的四个例子，現在我們再举一个有趣的例子，就是所謂关于兎子数目的斐波那契問題[①].

假定每对大兎每月能生产一对小兎，而每对小兎过一个月就能完全长成。問在一年里面，由一对大兎能繁殖出多少对大兎来？

这个問題有趣的并不是正面的答案，那是不难直接算出的。我們感兴趣的是大兎的总对数所成的級数。假定最初的对数記作 u_0，过了一个月是 u_1，过了两个月是 u_2，而一般的过了 n 个月是 u_n。由題設，$u_0=1$．过了一个月之后，有一对小兎生产出来了，但是大兎的对数仍然一样，卽 $u_1=1$．过了两个月，这对小兎长大了，而且大兎又有一对小兎生产出来，所以 $u_2=2$．这样繼續算下去，还可以得出 $u_3=3, u_4=5, \cdots$．一般地說，假設我們已經求出 n 个月以后大兎的对数 (u_n) 和 $n+1$ 个月后大兎的对数 (u_{n+1})，那末因为在第 $n+1$ 个月的时候，原来的 u_n 对大兎又生产了 u_n 对小兎，所以在第 $n+2$ 个月之后，大兎的总对数应該是

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

由此可見，大兎的对数 $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 恰好組成一个二阶循环級数，我們叫它做**斐波那契級数**.

---

① 斐波那契(Fibonacci)，卽比薩的萊翁那度，中世紀意大利的数学家

知道了循环方程式和 u_0, u_1 的数值，可以逐步地把所有的 $u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 算出来。自然会提出問題：是不是可以有办法直接地把一般的 u_n 表出来呢？

考虑循环級数

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots.$$

很容易看出它的特征多项式是 $1-x-x^2$. 于是由上节的公式

$$\begin{aligned}S_\alpha&=\frac{u_0+(u_1-u_0)x}{1-x-x^2}=\frac{1}{1-x-x^2}\\&=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x\right)}\\&=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x}+\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x}\\&=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x}{\sqrt{5}-1}}+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x}{\sqrt{5}+1}}.\end{aligned}$$

再根据混合級数的公式展开上式的右边，得到

$$\begin{aligned}&u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots\\&=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\left(1+\frac{2x}{\sqrt{5}-1}+\frac{2^2x^2}{(\sqrt{5}-1)^2}\right.\\&\qquad\qquad\left.+\cdots+\frac{2^nx^n}{(\sqrt{5}-1)^n}+\cdots\right)\\&\quad+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\left(1-\frac{2x}{\sqrt{5}+1}+\frac{2^2x^2}{(\sqrt{5}+1)^2}\right.\\&\qquad\qquad\left.-\cdots+(-1)^n\frac{2^nx^n}{(\sqrt{5}+1)^n}+\cdots\right).\end{aligned}$$

在等式两边对比 x^n 的系数，我們有以下的公式：

$$u_n=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{2^n}{(\sqrt{5}-1)^n}+(-1)^n\frac{2}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{2^n}{(\sqrt{5}+1)^n}$$

$$=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{(\sqrt{5}-1)^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{(\sqrt{5}+1)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

这个等式是很耐人寻味的：虽然所有的 u_n 都是正整数，可是它們却由一些无理数表示出来。在实际計算的时候，如果我們注意以下的事实，可以方便得多：由于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是一个小于 1 的数，而 u_n 是整数，因此如果 n 是奇数，那末 u_n 等于 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ 的整数部分；如果 n 是偶数，那末 u_n 等于 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ 的整数部分加 1。換句話說，我們并不需要算出 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ 的数值。

另一方面，在等式

$$S_n=\frac{u_0+(u_1-u_0)x}{1-x-x^2}-\frac{(u_n+u_{n-1})x^{n+1}+u_nx^{n+2}}{1-x-x^2}$$

中用 $x=1$ 代入，得到

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=2u_n+u_{n-1}-1.$$

或

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-2}=u_n-1.$$

这也是斐波那契級数的基本性質之一.

一三 倒数級数

关于高阶等差級数和混合級数的討論，引导我們去考虑它們的倒数級数。但是在初等数学的范围以内，我們却无法求得一切这样的倒数級数的和.

首先来討論高阶等差級数的倒数級数，而且也从一些特殊的形式开始.

級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

就是我們所熟知的調和級数。它是不能求和的，因为当項数 n 无限增大的时候，它的和要趋向于无穷大.

然而对于以下的一些倒数級数，我們仍可以有办法求它們的和：

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)-\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2!}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)-\cdots$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right)-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2!}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n-1)n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{3\cdot 3!}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\right)-\cdots$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

$$-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3\cdot 3!}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

…………………………………………………………………………………………

一般地說，因为

$$\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r-1)}$$

$$=\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r-2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+r-1)}\right),$$

仿照上面的办法，可以求出

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots r}+\frac{1}{2\cdot 3\cdots(r+1)}+\frac{1}{3\cdot 4\cdots(r+2)}$$

$$+\cdots+\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+r-1)}$$

$$=\frac{1}{(r-1)\cdot(r-1)!}-\frac{1}{(r-1)(n+1)\cdots(n+r-1)}.$$

以上所求得的都是包含 n 项的級数的和；每一个和数都是一个常数和一个同 n 有关的数的差。可以看到，当项数 n 愈来愈大的时候，这个同 n 有关的数就变得非常小而接近于 0（因为它的分母趋向于无穷大）。于是我們得到了如下的一些无穷級数的和的公式：

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots=\frac{1}{2\cdot 2!}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots=\frac{1}{3\cdot 3!}=\frac{1}{18},$$

…………………………………………………………………………

一般的是

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}+\frac{1}{2\cdot 3\cdots (r+1)}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+r-1)}+\cdots=\frac{1}{(r-1)\cdot(r-1)!}.$$

这里和前几节的討論不同的地方，就是我們幷不能从这些已有的公式来求出一般的倒数級数

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}$$

或无穷級数

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}+\cdots$$

的和．我們所举的調和級数就是一个例子．又例如无穷級数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

的和也是不能用初等方法求得的①．

其次就混合級数的倒数級数来說，情况比上面更要复杂些．我們为了簡便起見，只对无穷級数的情形略加討論．

无穷級数

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

叫做**对数級数**．它也是不能用初等方法求和的．在高等数学中，可以証明这个級数在 $-1<x<1$ 的时候是收斂的，并且它的值等于 $-\log(1-x)$．

我們姑且假定这个結果是已知的． 那末利用这个結果，还可以推出另外一些无穷級数的和． 例如，如果 $x\neq 0$，而且 $-1<x<1$，就有：

① 在高等数学中可以証明这和的数值等于 $\frac{\pi^2}{6}$．

$$\frac{1}{1\cdot 2}x+\frac{1}{2\cdot 3}x^2+\frac{1}{3\cdot 4}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}x^{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}x^n+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)x^3+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)x^{n-1}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n+\cdots$$
$$=x-\frac{1}{2}(1-x)x-\frac{1}{3}(1-x)x^2-\cdots-\frac{1}{n}(1-x)x^{n-1}-\cdots$$
$$=x-\frac{1-x}{x}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{n}x^n+\cdots\right)$$
$$=x-\frac{1-x}{x}[-\log(1-x)-x]$$
$$=1+\frac{(1-x)\log(1-x)}{x}.$$

在对 x 作同样的限制之下，又有

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^2+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}x^3$$
$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}x^{n-1}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}x^n+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)x^3$$
$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)x^{n-1}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)x^n+\cdots$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2\cdot 3}(1-x)x+\frac{1}{3\cdot 4}(1-x)x^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}(1-x)x^{n-1}+\cdots\Big]$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1-x}{2x}\left[1+\frac{(1-x)\log(1-x)}{x}-\frac{1}{1\cdot 2}x\right]$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2x}-\frac{(1-x)^2\log(1-x)}{2x^2}.$$

这样的手續还可以繼續做下去. 不过也和前面討論的情形一样，有了这些公式，仍然不能求出一般的无穷混合級数的

倒数級数的和。

一四 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的漸近值

从上节中已經可以看到，有很多无穷級数我們是无法在初等数学的范围之內求得它們的准确值的；而且即使能求出来，如果它是一个无理数，那末在实际应用上仍然是不方便的。因此就实用的价值来說，我們的任务往往是要用最簡捷的方法求得一个无穷級数的有理漸近值。

本节的目的就是建議一个方法，来求級数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

的漸近值。为了簡便起見，我們采用符号 $\sum$（念作西格碼）来記級数的和：

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

符号 $\sum$ 下面的 $n=1$ 表示这个无穷級数中的 n 順序地跑过从 1 开始的所有正整数。

同样，可以写

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

…………………………………………………………

有时候，我們并不要考虑級数的全部而只取这个級数的“尾部”；这时可以把符号$\sum$下面的$n=1$改成$n=N$，表示n跑过从N开始的一切正整数。例如

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{N^2}+\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\cdots.$$

下面我們开始进行計算.

第一步 因为

$$\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)},$$

所以

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=2,$$

即 $1<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<2$. 根据同样的理由，

$$\frac{1}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}<\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}<\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{3}{4},$$

于是得到更精密的估計式：

$$\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}.$$

这个方法虽然簡单，却有美中不足的地方。缺点就在于它把級数的各項都放大或縮小，使变成已有方法求和的級数；这样，只要原級数中有一項和被代換的項相差1%，那末得出的答数(漸近值)的准确度就絕不能比1%还小。因此为了估

計得更精确些，我們还得另外想办法.

第二步 設 N 是一个給定了的正整数，我們研究級数的“尾部”

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

和第一步同样的理由，它适合不等式①

$$\frac{1}{N+1}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{N}.$$

这說明了

$$0<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{N+1}<\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}=\frac{1}{N(N+1)}.$$

如果选取 $N=4$，那末上式变成：

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)-\frac{1}{4+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{20}=0.05,$$

于是算出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的漸近值是

$$a_1=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{5}=1.6236.$$

它的誤差不超过 5 %.

---

① 級数 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{N}$，$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{N+1}$，可以用上一节所用的方法来証明. 以下还有类似的等式也是这样.

第三步 我們还可以把 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的漸近值繼續精密化。試考察

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)},$$

它适合不等式

$$\frac{1}{2(N+1)(N+2)}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2N(N+1)},$$

也就是

$$0<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{2(N+1)(N+2)}$$

$$<\frac{1}{2N(N+1)}-\frac{1}{2(N+1)(N+2)}=\frac{1}{N(N+1)(N+2)}.$$

仍选取 $N=4$，得到：

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\left(a_1+\frac{1}{2(4+1)(4+2)}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\left(a_1+\frac{1}{60}\right)<\frac{1}{120}=0.0083.$$

所以求得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的更精确的漸近值是

$$a_2=a_1+\frac{1}{60}=1.64027.$$

它的誤差不超过 0.0083，即准确到小数点两位。

第四步 再应用类似的方法，又有不等式

$$\frac{2}{3(N+1)(N+2)(N+3)}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$<\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{n^2(n+1)(n+2)}$$

$$<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{2}{3N(N+1)(N+2)},$$

或

$$0<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{2(N+1)(N+2)}-\frac{2}{3(N+1)(N+2)(N+3)}$$

$$<\frac{2}{N(N+1)(N+2)(N+3)}.$$

仍取 $N=4$，那末有：

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\left(a_2+\frac{1}{315}\right)<\frac{1}{420}=0.0024,$$

由此得出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的更精确的漸近值是

$$a_3=a_2+\frac{1}{315}=a_2+0.00317=1.64344,$$

它的誤差不超过 0.0024.

这一步驟可以繼續进行下去．算的次数愈多，得出的漸近值的准确度就愈大．例如总是取 $N=4$，当我們算到第六次时，就可以保証准确到小数点三位．但是必須指出：这个方法算到后面，得出的漸近值逼近准确数的速度非常緩慢；換句話說，如果要使小数部分的准确度向后推移一位，往往要算好几次．例如像上面的情形，从小数第二位到第三位，就要經过

3 次运算才能获得.

自然,如果我們要得出更近似的結果,还可以把 N 取得大些,只不过这时候計算的手續要多做几次罢了. 例如取 $N=10$,把上面步驟进行 5 次,就得到在一般情况下已經足够适用的漸近值 1.64493,它和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的誤差不超过 0.000005,即它的前四位小数都是准确的.

精确地估計一个无穷級数的和的值,是"近似計算"的內容之一,在实际上有很重要的应用,我們决不可輕視它. 本节只是举出一个例子.